Mathematisches Institut
Justus Liebig Universität Giessen
Prof. Dr. Thomas Bartsch
T. Weth, S. Schulz

# Analysis I

Übungen WS 02/03

2. Klausur, 17.1.03 Name:

Bitte tragen Sie zuerst auf jedem Blatt Ihren Namen ein, damit Ihnen keine Punkte verlorengehen.

32 Punkte sind zu erreichen. 24 Punkte entsprechen 100%.

1. 1. (2 Punkte) Seien $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wann heisst die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (nach Definition) konvergent ?

   **Lösung**: Falls die durch $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ gegebene Folge $(A_n)_n$ komplexer Zahlen konvergiert.

   2. (6 Punkte) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$$

   **Lösung**: Es ist

   $$\frac{3n+1}{5n^2-1} \geq \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5}\frac{1}{n} \geq 0$$

   für $n \in \mathbb{N}$. Waere also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n^2-1}$ konvergent, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5}\frac{1}{n}$ nach dem Majorantenkriterium, woraus dann die Konvergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ folgen würde. Letztere ist aber nicht konvergent nach Vorlesung, also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n^2-1}$ auch nicht konvergent.

   Nach Vorlesung gilt

   $$\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

   Daher ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$ offensichtlich (?) genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j-1}$ konvergent ist. Die Konvergenz der letzteren Reihe folgt aber aus dem Leibnizkriterium, da $(\frac{1}{2j-1})_j$ eine monotone Nullfolge ist.

2. a) (2 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Wann heisst die Funktion $f$ (nach Definition) stetig in $a$ ?

**Lösung:** Falls für jede Folge $(z_n)_n$ in $D$ gilt:

$$z_n \to a \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(z_n) \to f(a) \quad \text{für } n \to \infty.$$

b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

stetig ist.

**Lösung:** Definiere $A_1 := [-1, 1]$, $A_2 := (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Dann ist $A_1$ nach Aufgabe 30(ii) abgeschlossen in $\mathbb{R}$, und ebenso $A_2$ als Vereinigung zweier in $\mathbb{R}$ abgeschlossener Mengen. Zudem ist $f(x) = 0$ für $x \in A_1$, und $f(x) = x^2 - 1$ für $x \in A_2$. Nach Vorlesung sind Polynome aber stetig auf Teilmengen von $\mathbb{C}$, insbesondere ist also $f|_{A_i}$ stetig für $i = 1, 2$. Die Stetigkeit von $f$ folgt nun aus Aufgabe 29, da $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$.

3. (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$, und sei $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ (abhängig von $a$ und $\varepsilon$) derart, dass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$.

   **Lösung:** Wähle $\delta = \frac{1}{2}\min\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta$. Dann gilt insbesondere $|x| \leq |x - a| + |a| \leq 1 + |a|$, also

   $$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| \leq |x - a|(|x| + |a|) \leq |x - a|(2|a| + 1) < \varepsilon.$$

4. (3 Punkte) Lässt sich die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

stetig in 0 fortsetzen ?
Beweisen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:** Die Funktion $f$ lässt sich stetig in 0 fortsetzen: Definiere

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $g$ eine Fortsetzung von $f$. Zu zeigen ist: $g$ ist stetig in 0. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |x| < \delta$:

$$\begin{aligned} |g(x) - 1| &= |\frac{e^x - 1}{x} - 1| \\ &= |\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1| \\ &= |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1| \\ &= |\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}| \\ &= |x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!}| \\ &\leq |x| \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \\ &= \frac{|x|}{1 - |x|} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $|g(x) - 1| < \varepsilon$ sowieso, also folgt die Stetigkeit von $g$ in 0.

5. a) (2 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{C}$. Wann heisst (nach Definition) $D$ offen in $\mathbb{C}$ ?

**Lösung:** Falls für alle $a \in D$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subset D$.

b) (3 Punkte) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \; : \; 0 < |z| < 1\}$. Zeigen Sie, dass $D$ offen und nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist.

**Lösung:** Sei $a \in D$. Setze $\varepsilon := \min\{|a|, 1 - |a|\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$, und für $x \in U_\varepsilon(a)$ gilt

$$|x| = |a - (a - x)| \geq |a| - |a - x| > |a| - \varepsilon \geq 0,$$

und

$$|x| \leq |a| + |x - a| < |a| + \varepsilon \leq 1,$$

also $x \in D$. Es folgt $U_\varepsilon(a) \subset D$, und dies zeigt, dass $D$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Betrachte nun $x_n := \frac{1}{2n} \in D$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $x_n \to 0 \in \mathbb{C} \setminus D$ für $n \to \infty$, ist $D$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}$ nach Satz 6.21.

Kürzere Lösung zur Offenheit von $D$: $D$ ist Urbild des offenen Intervalls $(0, 1)$ unter der Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, welche stetig ist. Also ist $D$ offen nach Satz 6.22.

6. a) (2 Punkte) Beweisen Sie: $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

**Lösung:** Es ist

$$\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(2 + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) \\ &= \frac{1}{4}(2 + i - i) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Stellen Sie den Punkt $1 + i \in \mathbb{C}$ in Polarkoordination dar (mit Beweis).

**Lösung:** Da $\cos t > 0$ für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ nach 7.7, ist $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nach (i). Mit 7.10 und 7.4 folgt

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist die Polarkoordinatendarstellung gegeben durch

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + i.$$

c) (3 Punkte) Stellen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = 3$ in Polarkoordinaten dar (mit Beweis).

**Lösung:** Ist $z = re^{it}$ eine Lösung von $z^3 = 3$ (mit $r \geq 0$ und $t \in [0, 2\pi)$), so gilt

$$r^3 e^{i3t} = 3,$$

also $r^3 = 3$ und $3t = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{C}$. Nach Wahl von $t$ kommen nur $k = 0, 1, 2$ in Frage, und dazu gehören die Werte $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}\pi$ und $t_3 = \frac{4}{3}\pi$. Also ist

$$z \in \{\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt{3}e^{i\frac{4}{3}\pi}\} =: M.$$

Man sieht jedoch unmittelbar, dass alle drei Zahlen auch Lösungen der Gleichung $z^3 = 3$ sind. Also ist $M$ genau die Lösungsmenge.